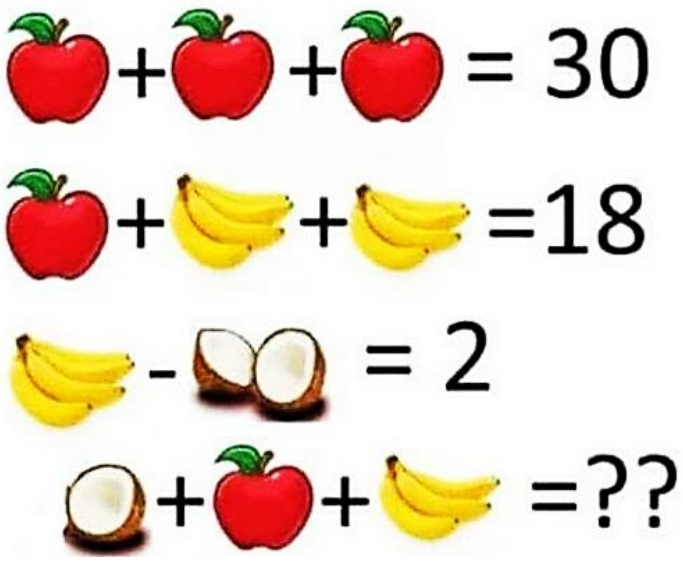
Collège Citoyen

Mathématique - 2e secondaire

CHAPITRE 3

Introduction à l'algèbre

Sommet p.71 à 126



Année scolaire 2019-2020

Document créé par Marie-Pier Perron

MATHÉMATIQUE

La démarche verticale parfaite

Étape 1	**Numéroter** et inscrire le **titre** de ton étape (ex : #1 Trouver le périmètre)
Étape 2	Inscrire ta **formule générale** de ton équation. **AUCUNE DONNÉE NUMÉRIQUE** (ex : P = 2b + 2h)
Étape 3	Inscrire tes **données connues** dans ta formule générale (ex : P = 2 . 4 + 2 . 6)
Étape 4	Effectuer tous tes **calculs** afin d'obtenir le résultat voulu. (ex : P = 20 cm)
Étape 5	**Recommencer l'étape 1 à 4** pour ta prochaine étape **ou donner ta réponse** en n'oubliant pas les unités de mesure.

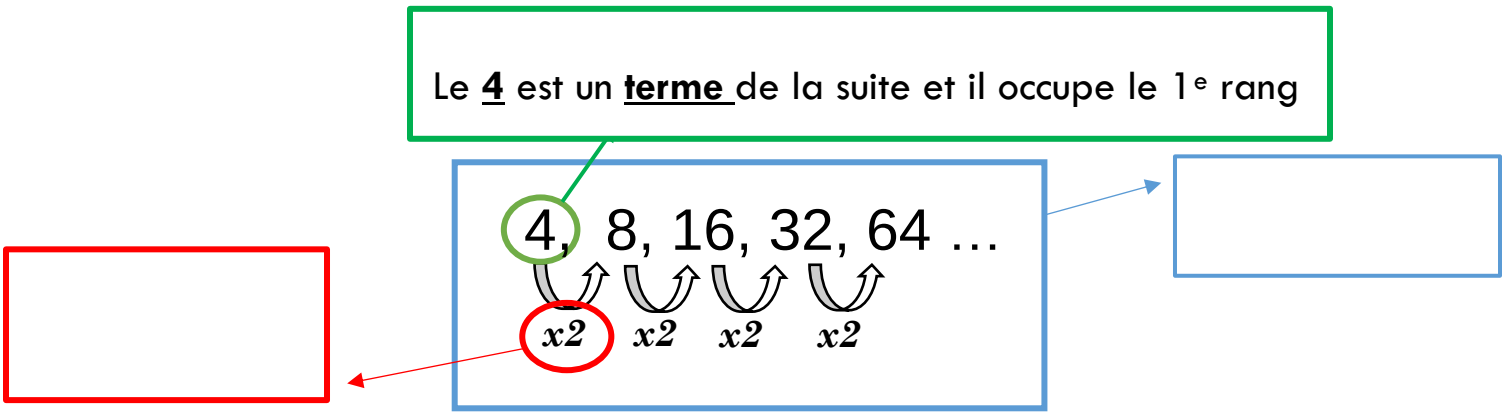
Exemple d'une structure parfaite ! 😊

La cour de l'école Rayon de soleil mesure 10 m par 30 m. Celle-ci désire installer une clôture tout autour. Le coût de la clôture est de 52$/m. Quel sera le prix d'installation de celle-ci en calculant des taxes de 15%?

Rappels : Les suites arithmétiques

1. VOCABULAIRE

- **Suite numérique** : La suite numérique est une liste de nombres placés dans un ordre _____.
- **Terme** : Un terme est un _____ (un nombre) d'une suite.
- **Rang** : Le rang est la _____ d'un terme dans la suite.
- **Régularité** : La régularité est _____ entre les termes d'une suite.



Exercices :

1. Compose une suite de 6 termes avec une régularité de +3.

2. Que serait le terme au 10e rang de cette suite?

- **Suite arithmétique :** La suite arithmétique est une suite de nombre dans laquelle la _____ entre deux termes consécutifs est _____.

Attention! Suite numérique VS suite arithmétique

_____

_____

_____

_____

- **Raison :** La raison correspond à la _____ entre 2 termes consécutifs.

7, 14, 21, 28, 35, …

1. Quelle est la différence entre chacun des termes de cette suite ?

2. Est-ce que la différence entre chacun des termes est constante ?

Donc,

_____

_____

- **Règle d'une suite** : La règle d'une suite est une ***expression algébrique*** qui me permet de *trouver rapidement la valeur* d'un terme *selon son rang*.

2. LA RÈGLE

La règle d'une suite arithmétique est toujours :

Terme = raison x rang + rang zéro (terme constant)

La formule générale sera : $T = a \cdot n + R_0$

Exercices : Voici la règle d'une suite arithmétique : T = 2n + 3

1. Quelle est la raison de cette suite ? _____
2. Quel est le rang zéro de cette suite ? _____
3. Quel est le terme au 27e rang de cette suite?

Attention!

En algèbre, un nombre suivi d'une lettre signifie une multiplication.

$$2n \rightarrow 2 \cdot n$$

De plus, pour ne pas confondre la lettre x du signe de multiplication, le **point** sera maintenant le signe d'une multiplication

4. Quel est le rang du terme 87 ?

Exercices

Trouvez les 5 premiers termes des suites suivantes.

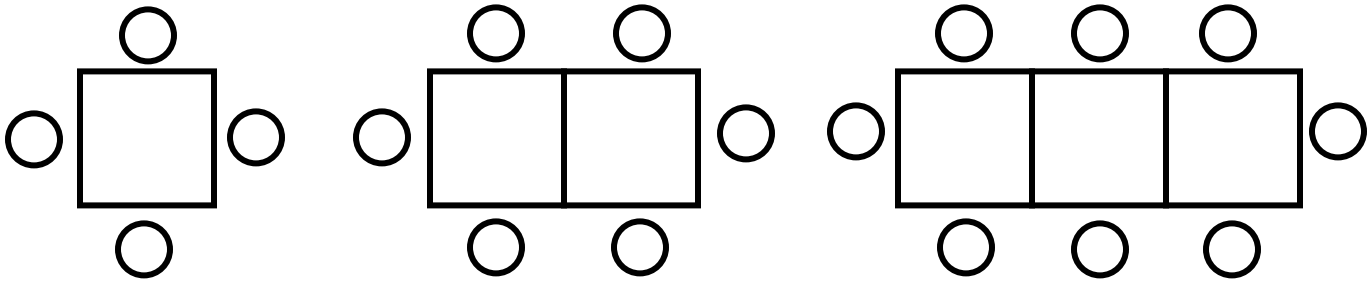
a) $T = 3n - 2$: _____

b) $T = 4n + 1$: _____

c) $T = -2n - 1$: _____

ACTIVITÉ!

Jacob a une compagnie de location de tables et de chaises. Toutes les tables sont de forme carrée et il suffit de les mettre une à la suite de l'autres afin de construire la grandeur de table voulue. Voici trois grandeurs différentes de tables, accompagnées de leurs chaises.



Les clients de Jacob peuvent alors choisir le nombre de tables carrées qu'ils désirent afin d'asseoir tous leurs invités.

À vous de jouer!

Trouvez **deux règles, différentes,** qui permettrons aux clients de Jacob de calculer le nombre d'invités qu'ils pourront avoir autour d'une table **selon** le nombre de tables carrées alignées (représenté par n).

Règle 1 : _____

Règle 2 : _____

Comment trouver la règle?

Pour trouver la règle d'une suite arithmétique, il suffit de 3 étapes.

Étape 1 : Trouver la raison

Étape 2 : Trouver le rang zéro ou le terme constant.

Étape 3 : Inscrire la règle sous la forme $T= an+R_0$

Voici une suite arithmétique : 3, 7, 11, 15, 19, 23, …

Étape 1 : Trouver la raison

Étape 2 : Trouver le rang zéro ou le terme constant.

Étape 3 : Inscrire la règle complète.

Exemple 2 :

-12, -14, -16, -18, …

1. La raison : _____

2. Rang zéro (terme constant) : _____

3. La règle : _____

Exercices : Trouvez la règle des suites arithmétiques suivantes.

a) 1, 3, 5, 7, 9, …

La raison	Terme constant	La règle

b) 18, 15, 12, 9, 6, …

La raison	Terme constant	La règle

c) -5, -1, 3, 7, 11, …

La raison	Terme constant	La règle

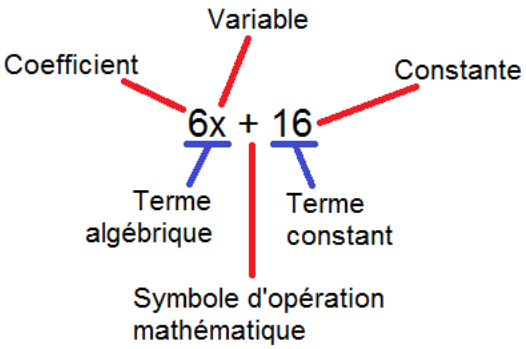
Attention ! Cette section changera votre vie 😊

BIENVENUE DANS LE MONDE DE L'ALGÈBRE !

LES EXPRESSIONS ALGÉBRIQUES.

1. LE VOCABULAIRE

- **Terme :** Un terme est un élément d'une expression algébrique. Ceux-ci sont séparés par une **addition** ou une **soustraction** Il peut être composé :
  - **D'un terme constant :** Un terme constant est un nombre écrit _____.
    - Exemple : 1, 3, 25
  - **D'un coefficient multiplié par une ou des variables :**



• **Coefficient** : Le coefficient est un nombre situé à l'_____ d'une ou plusieurs _____.

• **Variables** : Les variables sont des lettres **minuscules** à laquelle on peut donner différentes _____. Ces variables peuvent aussi être affectées d'un **exposant.**

Exemple : 12 xy^2

Le coefficient : _____

Les variables : _____

Exposants : _____

Important → L'opération entre le coefficient et ses variables est : _____.

Attention!

Si aucun nombre se trouve devant les variables, cela signifie que son coefficient est 1. Le principe est le même pour les exposants.

$$xy^2 \rightarrow 1x^1y^2$$

Mais nous n'écrivons jamais le 1.

Exercices

Expressions algébriques	Coefficient	Variable(s)	Terme constant

- **L'expression algébrique :** L'expression algébrique est composée de plusieurs termes.

$$3x^2 + 4x - 2$$

Rappel : Les termes sont séparés par une **addition** ou une **soustraction.**

- **Le polynôme** : Un polynôme est une expression algébrique.

Monôme = terme

Ce sont des synonymes

Étymologie : **Polynôme**

Poly (grec ancien) : Beaucoup

Nôme (latin nomen) : Terme

- ***Monôme*** : Lorsque le polynôme est formé d'un seul terme
- ***Binôme*** : Lorsque le polynôme est formé de _____ termes.
- ***Trinôme*** : Lorsque le polynôme est formé de _____ termes.

- **Le degré d'un monôme :** Le degré est la **somme** des exposants des variables du monôme (terme).

Exemple 1 : $2xy^2$

Exemple 2 : 3xyz

Exercices

Monôme	*Degré du monôme*
$4xy$	
$3x^2y$	
x^2y^3z	
$5a^4b$	
4	

- **Le degré d'un polynôme** : Le degré du polynôme correspond au **degré du monôme le plus élevé** dans le polynôme.

Attention!

Ne pas confondre degré du **polynôme** et degré du **monôme.**

Exemple : $3xyz + 4xy + 3$

- Le degré du 1e terme est : _____
- Le degré du 2e terme est : _____
- Le degré du 3e terme est : _____

Donc, le polynôme $3xyz + 4xy + 3$ est de degré _____.

Exercices

Polynômes	Degré de chacun des monômes		Degré du polynôme
$3xy + 2x^2y$	$3xy$	$2x^2y$	
$w^5 + xyz$	w^5	xyz	
$a^2 + b^2$	a^2	b^2	

2. LES CONVENTIONS D'ÉCRITURE

- **Règle 1 : LE COEFFICIENT**

  Toujours écrire le coefficient _____ les variables. Si le coefficient est de 1, il est convenu de NE PAS l'écrire.

  Exemple :

  - $5xy$: **correct**.
  - $x5y$: **incorrect,** car 5 est situé entre deux variables.

- **Règle 2 : L'ORDRE ALPHABÉTIQUE.**

  Toujours écrire les variables en ordre _____ pour chacun des termes et cela peu importe l'exposant qui lui est affecté.

  Exemple :

  - $5xy^2$: **correct**.
  - $5y^2x$: **incorrect,** car dans l'alphabet le x vient avant le y.

- **Règle 3 : L'ORDRE DES TERMES**

  Dans un polynôme, toujours inscrire les termes en ordre _____ (plus élevé au moins élevé) de degré des monômes. Si deux termes on le même degré, on applique l'ordre _____.

  Exemple :

  - $5xy + 3$ **Correct**
  - $3 + 5xy$ **incorrect,** car 3 est de degré 0 et $5xy$ est de degré 2.

Exercices

Mentionnez si l'écriture de ces expressions algébriques sont adéquates. Si non, dite la ou (les) règle(s) qui ne sont pas respectées et corrigez l'écriture.

a) $3xb^2$

Règle 1
Règle 2
Règle 3

Correction : _____

b) $3xz^2 + 3yz^3$

Règle 1
Règle 2
Règle 3

Correction : _____

c) $4xz^2 + 3yz^2$

Règle 1
Règle 2
Règle 3

Correction : _____

d) $ab + xy$

Règle 1
Règle 2
Règle 3

Correction : _____

e) $x4z^2 + yz^33$

Règle 1
Règle 2
Règle 3

Correction : _____

Rappel : Les priorités d'opérations. (PEMDAS)

P : Les parenthèses.

E : Les exposants

M/D : Multiplication et division (de gauche à droite)

A/S : Addition et soustraction (de gauche à droite)

Exemple :

$$(\mathbf{2 + 3})^{\mathbf{2}} + \mathbf{8 - 2 \cdot 5 + 2\,(4^2 - 3 \cdot 4)}$$

4. LA VALEUR NUMÉRIQUE D'UNE EXPRESSION ALGÉBRIQUE.

Pour trouver la valeur numérique d'une expression algébrique, il est nécessaire d'établir **une valeur fixe** à chacune des _____ de l'expression.

Exemple :

$$3(\,x + 2)\ \text{où}\ x = 4$$

Dans ce cas, la valeur fixe donnée à x est 4. Donc, on doit remplacer x par 4 dans l'expression algébrique.

Question ?

Une fois la variable remplacée, cela vous fait penser à quelle notion?

Exemple 2 :

$$2b\,(3+b) \div (6-b) \text{ où } b = 3$$

Exercices : *Sommet p.80 #6 (exercice +)*

Tous les calculs doivent être faits dans le cahier spiralé ou sur Notability

Calculs :

LA RÉDUCTION ALGÉBRIQUE

La réduction algébrique a pour but d'effectuer **toutes les opérations** possibles d'une expression algébrique. Vous pouvez comparer la réduction algébrique à la résolution d'une chaîne d'opérations, mais **AVEC DES VARIABLES**.

1. VOCABULAIRE

- **Termes semblables :** Des termes sont dits semblables lorsqu'ils sont composés des mêmes _____ qui sont affectées des mêmes _____.

Exemple :

$3x^2y$ et $4x^2y$ **sont semblables** car les deux termes sont composés de x^2 et y.

$3xy$ et $4x^2y$ **ne sont pas semblables** car x est exposant 1 dans le 1e terme et exposant 2 dans le 2e.

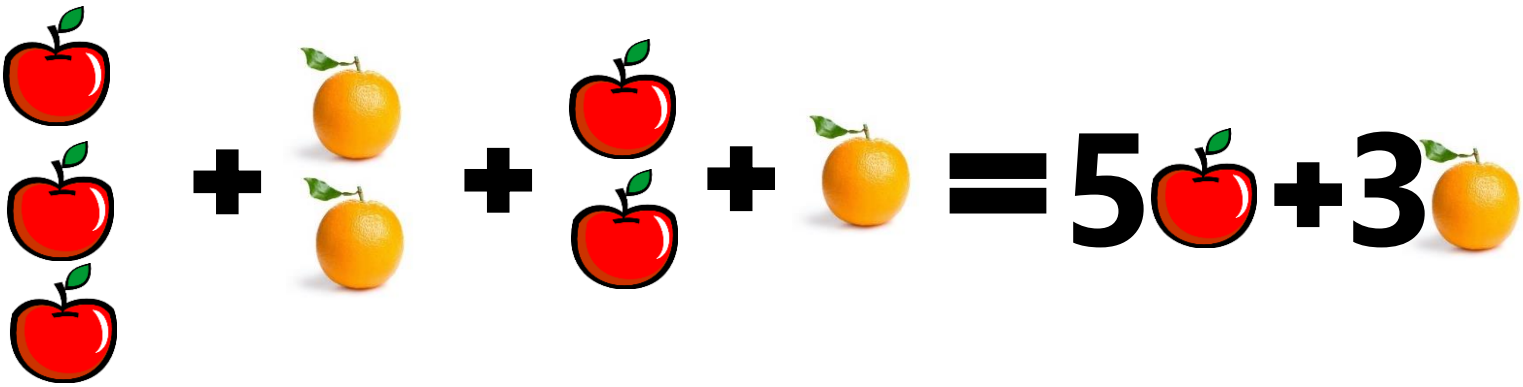
Exemples Est-ce que ces termes sont semblables ?

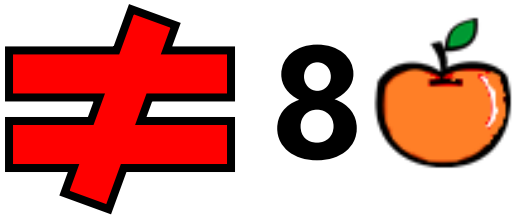
Les termes	Semblables	Non-semblables
$3xy$ et $4xy$		
xy^2 et yx^2		
xy et yx		
$3xyz$ et $3xy$		

2. L'ADDITION ET LA SOUSTRACTION ALGÉBRIQUE.

*POUR **ADDITIONNER OU SOUSTRAIRE** en algèbre, les termes doivent **ÊTRE SEMBLABLES** !*

LES POMMES AVEC LES POMMES, LES ORANGES AVEC LES ORANGES.





Étape de réduction

Étape 1 : Identifier les termes semblables à l'aide de surligneurs.

Étape 2 : Additionner ou soustraire les coefficients des **termes semblables**.

Phrase importante!

Les chiffres avec les chiffres

Étape 3 : Réécriture de l'expression algébrique selon les trois règles d'écriture.

Exemple :

$$3xy^2 + 4x^2 + 2xy^2 + 4 - xy^2 + 2$$

Exemple 2 :

$$2a + 3ba - 5ab + 18 - a^2 - 2$$

Exemple 3 :

$$(\frac{1}{2}xy + \frac{2}{3}yx) - 5x^2 + (18 - x^2) - \frac{3}{5}$$

Exercices

a) $(3x^2 + 5x) + (x^2 + 5x - 3)$

b) $(-x^2 + 7x - 9) + (x^2 - 4x + 3)$

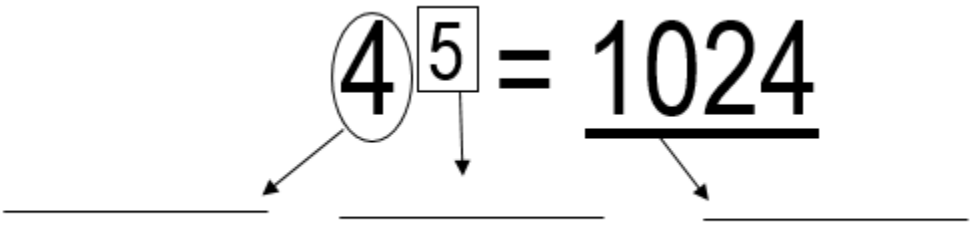
c) $(0{,}5a^2 + 1{,}4a - 0{,}7) + (a^2 - 0{,}3a + 1{,}3)$

d) $a + (a + b)$

e) $\frac{1}{3}ab + \frac{2}{3}b - \frac{1}{6}ab + 3$

3. LA MULTIPLICATION D'EXPRESSIONS ALGÉBRIQUES

Rappel : LES EXPOSANTS.

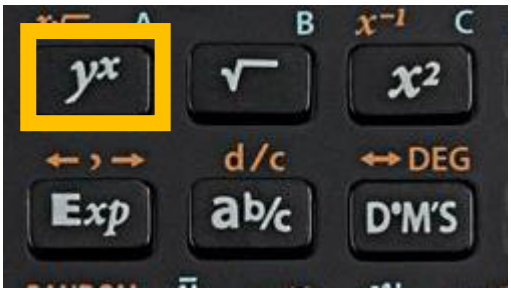


_____ _____ _____

- **Définition :** Un exposant représente le nombre de fois que la base est multipliée par _____.

$$a^m = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a \times a}_{m \text{ fois}} \quad (m > 0)$$

Calculatrice :



Donc,

2^4 = _____

5^3= _____

3^4 = _____

a^3 = _____

ACTIVITÉ

Découvrir la loi d'un produit d'une puissance

Exemple 1 : Inscrivez ces puissances à l'aide d'une multiplication répétée.

- $2^2 =$ _____
- $2^3 =$ _____
- $2^2 \cdot 2^3 =$ _____ = _____
- $2^3 \cdot 2^4 \cdot 3^2 =$ _____ = _____

Question?

Serait-il possible d'inscrire ces multiplications répétées en UNE SEULE puissance?

Exemple 2 : Faites le même exercice, mais avec des variables.

- $a^2 =$ _____
- $a^3 =$ _____
- $a^2 \cdot a^3 =$ _____ = _____
- $a^3 \cdot a^4 \cdot b^2 =$ _____ = _____

Que remarquez-vous?

Donc, la **loi** des exposants lors de la **multiplication de même base** est

$$a^m \cdot a^n = a^{\square}$$

C'est cette loi que vous devrez utiliser lors de la multiplication algébrique.

- **La distributivité de la multiplication sur l'addition et soustraction.**

Dans plusieurs contextes il vous sera demandé de multiplier un terme algébrique par une parenthèse comportant à son tour plusieurs termes algébriques. Cette application mathématique se nomme ***la distributivité de la multiplication sur l'addition/soustraction.***

Exemple:

$$2 \quad (5a + 2)$$

Exemple 2 :

$$2a \quad (5a + 2)$$

Phrase importante !

Les chiffres avec les chiffres et les lettres avec les lettres.

Exemple 3 :

$$x^3 \, (x + 2x + 4)$$

Exemple 4 :

$$3x \, (x^2 - 2x + 3)$$

Exemple 5 :

$$- 4a\,(2ab - a^2)$$

Exemple 6 :

$$-3w\,(- 4z - 3w + 4)$$

ET SI NOUS AVIONS UNIQUEMENT UN MOINS DEVANT UNE PARENTHÈSE?

Exemple 1 :

$$- (a - b)$$

Attention

Lorsque nous retrouvons **uniquement** un **moins** devant la parenthèse, c'est comme si nous voulions **multiplier** la parenthèse par **-1**.

Question ?

Que remarquez-vous lorsque vous multipliez par -1 ?

Exemple 2 :

$$-(-x + y)$$

Exercices

a) $3x^2y \cdot (4x^3y + 2xy - 3)$

b) $2xy^2 \cdot (6x^4y + 3xy - 4y^2)$

c) $\cdot \frac{1}{2}x^2y^3 \cdot (24xy^2 + 6x^2y - 12x)$

d) $4x^2y^2 \cdot (3x^3y^2 - 2x^2y + 4)$

4. La division algébrique par un nombre entier.

Deux cas de division seront vus en 2e secondaire :

1. Division d'un **monôme par un nombre entier.**
2. Division d'un **polynôme par un nombre entier.**

Encore une fois, lors d'une division algébrique, **les chiffres avec les chiffres** est une phrase importante à retenir.

- **<u>Possibilité 1</u>** : Division d'un monôme par un nombre entier.

$$28ab \div 4$$

Étape 1 : Pour nous aider, nous allons réécrire la division sous forme fractionnaire.

$$\frac{28ab}{4}$$

Étape 2 : Effectuer la division

$$= \frac{28}{4}ab$$

$$= 7ab$$

Important

Toujours **réécrire les variables** après avoir fait la division.

Attention

Il existe trois façons d'écrire une division et vous devez être en mesure de repérer les trois écritures.

$4x \div 2$

$\frac{4x}{2}$

4x/2

Exercices

$\frac{25x^2y}{5}$	$3xy^2 \div -1$	$\frac{2x^2}{4}$
$\frac{21a^2b}{7}$	$-16x \div -4$	$\frac{5}{5}$
$-6x \div -5$	$\frac{5y}{5}$	$-x \div -4$

Possibilité 2 : Division d'un polynôme. *(2 termes et plus)*

$$(54a + 36b) \div 6$$

Étape 1 : Réécrire l'expression sous forme fractionnaire.

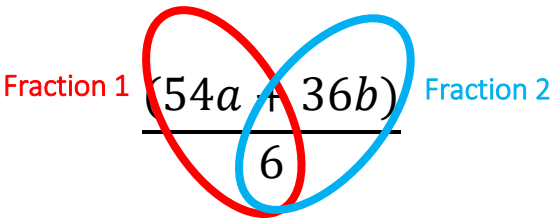
$$\frac{(54a + 36b)}{6}$$

Question

Pourquoi pouvons-nous pas additionner les deux termes du numérateur ?

Le but sera de retrouver la forme précédente, soit la division d'un monôme par un nombre.

Pour y arriver, vous devrez séparer le **binôme** en deux **monômes** qui seront chacun divisés par 6.



Donc, vous retrouverez deux fractions additionnées.

$$\frac{54a}{6} + \frac{36b}{6}$$

Étape 2 : Effectuer la division d'un monôme.

Exercices

$\frac{15x^2+5}{5}$	$(3xy^2-3) \div -3$	$\frac{8x^2+4}{4}$
$\frac{21a^2b-7ab}{7}$	$-16x+8 \div -4$ * Attention	$\frac{25x^2y+20x^2y}{5}$
$(-6x-6) \div -5$	$\frac{5y+25x-10}{5}$	$(-x+8-4) \div -4$

ET SI NOUS AVIONS UNE CHAÎNE D'OPÉRATIONS ALGÉBRIQUES.

Exemple 1 : 6 (2x – 1) – (3x + 4)

Exemple 2 : 2a (b – 7) + (a (2b + 3)) /3

Exemple 3 : $xy(1+xy)-x^2y(y+x)+x^2y^2$

Exercices

a) $-2a\,(9a + b) - 3a\,(2a - 1) =$

b) $5ax\,(-x + 9) + 3ax\,(3x - 5) =$

c) $-2b\,(4a - 4) - ((2ab + 6b) \div 2) =$

5. LES EXPRESSIONS ALGÉBRIQUES ÉQUIVALENTES

Des expressions algébriques sont dites équivalentes lorsqu'elles représentent une même quantité, en d'autres mots, elles sont égales.

Pour vérifier si des expressions algébriques sont équivalentes, il nous suffit de **réduire** à leur plus _____ et les _____.

Réduire : Effectuer toutes les opérations possibles d'une expression algébrique.

Exemple : Est-ce que ces deux expressions sont équivalentes ?

$2\,(4x - 7)$	$3x - 14 + 5x$

Exercices

Lesquelles de ces expressions sont équivalentes?

$3x + 4$	$4x^2 + 2x^2 - 6$	$7x + 2$	$\frac{6x^2 + 3x + 18}{3}$
$3x + 4x - 3 + 5$	$2\,(3x^2 - 3)$	$\frac{27x + 36}{9}$	$6x^2 + x + 6$

6. LA TRADUCTION D'UNE SITUATION PAR UNE EXPRESSION ALGÉBRIQUE.

Pour traduire une description verbale en une expression algébrique, certains mots de vocabulaire sont importants:

- Le résultat d'une addition est une _____.
- Le résultat d'une soustraction est une _____.
- Le résultat d'une multiplication est un _____.
- Le résultat d'une division est un _____.
- Un nombre au carré s'écrit _____.

Voici un tableau avec d'autres mots de vocabulaires possibles.

EXPRESSIONS MATHÉMATIQUES		OPÉRATION ASSOCIÉE
« fait la somme de » « de plus que » « en tout »	« au total » « ensemble » « ajouté »	+
« de moins que » « diminué de » « on enlève »	« faire la différence de » « retranché de »	-
« fait le produit de » « le double »	« fois plus » « le triple »	X
« faire le quotient de » « la moitié de » « séparer également »	« fois moins » « le tiers de » « partager »	÷

DICTIONNAIRE

L'ADDITION :

- 8 **de plus** qu'un nombre : _____
- 8 **ajouté à** un nombre : _____
- **La somme** d'un nombre et 8 : _____

LA SOUSTRACTION :

- 8 **de moins** qu'un nombre : _____
- 8 **soustrait à** un nombre : _____
- **La différence** d'un nombre et 8 : _____

LA MULTIPLICATION :

- **Produit** de 9 **et** un nombre : _____
- **Le double** d'un nombre : _____ (multiplier par _____)
- **Le triple** d'un nombre : _____ (multiplier par _____)
- **Le quadruple** d'un nombre : _____ (multiplier par _____)

LA DIVISION :

- **Le quotient** de 12x et 3 : _____
- **La moitié** de 6y : _____ (diviser par _____)
- **Le tiers de**12w : _____ (diviser par _____)
- **Le quart de** 16x : _____ (diviser par _____)
- **Le cinquième de** 25u : _____ (diviser par _____)

Truc!

«**ET**» est souvent le mot qui doit être remplacé par l'opération demandée.

Exemple : Quelle est l'expression algébrique qui représente chacun de ces nombres?

a) Le triple de x diminué de 6.

---

b) La sommes du triple de x et de 14.

---

c) Le cinquième de la somme de 7 et de x.

---

d) Le cinquième de x, augmenté de 12.

---

e) Le quart de la somme de x et de 3.

---

f) Le quotient de 54 et du triple de x.

C'EST LE TEMPS POUR UN KAHOOT! 😊

En contexte

Exemple 1 : Nous cherchons la somme de l'argent de Caroline et d'Hélène si le montant de Caroline dépasse de 5$ le double du montant d'Hélène.

On pose :

L'argent d'Hélène : _____

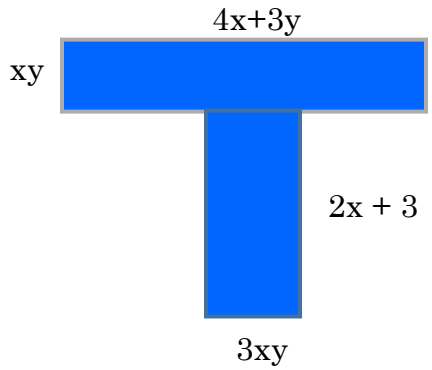
L'argent de Caroline : _____

Équation algébrique :

Exemple 2 : La différence entre l'âge de Marie qui a 5 ans de moins que le double de l'âge de sa sœur.

Exemple 3 : Daniel a 5 ans de plus que le double de l'âge de Claire. Gilles a 4 ans de moins que Daniel. Claude a 2 ans de moins que le triple de l'âge de Claire. Si *a* correspond à l'âge de Claire, trouvez les expressions algébriques correspondant à l'âge de Daniel et de Gilles.

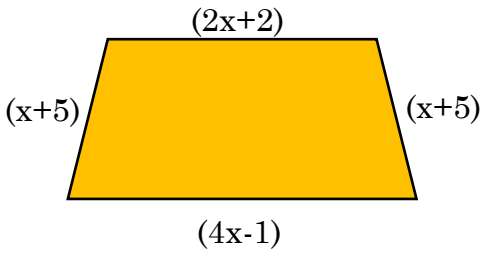
Exemple 4 : Si la formule d'aire d'un rectangle est $Aire = base \cdot hauteur$, quelle est l'aire de cette figure?



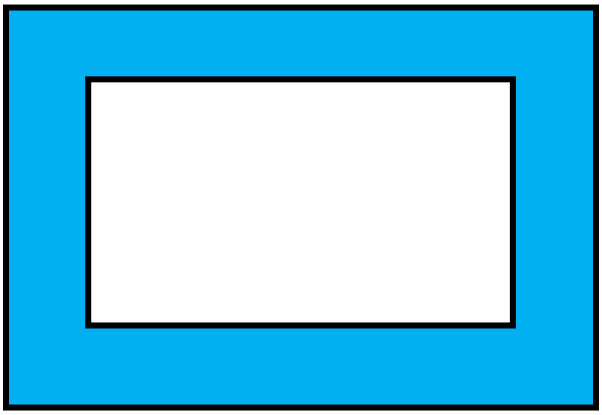
Exemple 5 : Quel est le périmètre d'un hexagone régulier ayant (2a+4) comme mesure de côté.

Note : Dans un hexagone régulier, tous les côtés sont isométriques.

Exemple 6 : Déterminez l'expression algébrique simplifiée représentant le périmètre de ce trapèze.



Exemple *7* : Trois amies décident d'acheter un chalet au Mont Tremblant. Jade investit 2000$ de plus que Noémie, et Laura investit 4000$ de moins que Noémie. Quelle est l'expression algébrique réduite représentant le total de leur investissement, si x représente l'investissement de Noémie.

Exemple 8 : La quantité totale de neige accumulée durant une tempête, s'il est tombé l'après-midi 5 cm de neige de moins que le matin, et la soirée 2 cm de plus que le double de la quantité tombée le matin. (Où q désigne la quantité tombée le matin.)

Exemple 9 : La hauteur extérieure du cadre ci-dessous mesure (2x-3) dm et sa base (4x+1) dm. Si l'épaisseur du morceau de bois utilisé pour la bordure du cadre est de 0,1x dm, quelles sont les dimensions de la photo que ce cadre pourra accueillir?